Der Energie-Impuls-Tensor in einer Fernwirkungsfeldtheorie[1]

Von Fritz Bopp

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, Hechingen

(Z. Naturforschg. 1, 237—242 [1946]; eingegangen am 13. Februar 1946)

Es wird eine Methode angegeben, die auch im Falle allgemeiner linearer Feldtheorien den Energie-Impuls-Tensor abzuleiten gestattet.

In einer früheren Untersuchung[2] wurden die allgemeinsten linearen Feldgleichungen der Mie-Bornschen Elektrodynamik[3] diskutiert. Dabei wurde wesentlich die Gültigkeit des Energie-Impuls-Satzes vorausgesetzt, ohne daß der Energie-Impuls-Tensor angegeben werden konnte. Eine unmittelbare Übertragung der üblichen Methoden[4] zu seiner Ableitung ist nicht möglich, weil in den Feldgleichungen der allgemeinen Theorie Feldgrößen verschiedener Raum-Zeitpunkte verknüpft werden. Im folgenden wird eine Methode entwickelt, die auch im Falle einer solchen „Fernwirkungs"-Feldtheorie zum Energie-Impuls-Tensor führt. Die aus dem Zusammenhang gelöste Darstellung der Ableitung mag um so eher gerechtfertigt sein, als sie noch in anderen Fällen angewandt werden kann[5].

Um den Formalismus nicht unnötig zu belasten, betrachten wir nur eine lineare einkomponentige Fernwirkungsfeldtheorie. Die Übertragung auf allgemeinere Fälle läßt sich mühelos durchführen. In unserem speziellen Fall leiten sich die Feldgleichungen aus dem Variationsprinzip[6]

$$\delta \mathcal{L}_0 = 0, \quad \bar{\mathcal{L}}_0 = \int \mathcal{L}_0 \, dx \, dx', \qquad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \varphi(x) \, \varepsilon_0(x - x') \, \varphi(x') \tag{1}$$

ab bei freier Variation der Feldgröße $\varphi(x)$. Die Integration in $\mathcal{L}_0$ ist hinsichtlich der beiden Punkte x und x' über die ganze Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit zu erstrecken. Die Feldgleichung lautet

$$(\varepsilon_0, \varphi) = \int \varepsilon_0(x - x') \, \varphi(x') \, dx' = 0 . \tag{2}$$

Aus Gründen der Lorentz-Invarianz kann ε nur von dem invarianten Ausdruck

$$s = \sqrt{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')^2 - c^2 (t - t')^2} \tag{3}$$

abhängen. Die Existenz des kanonischen Tensors folgt wie bisher aus der Translationsinvarianz von ε, in dem nur die Differenz der Vektoren x und x' vorkommt. Setzen wir speziell

$$\varepsilon_0(x - x') = \Box \, \delta(x - x') - \varkappa^2 \delta(x - x'), \tag{4}$$

so ergibt sich die Wellengleichung

$$(\Box - \varkappa^2) \, \varphi(x) = 0 . \tag{5}$$

Im allgemeinen Fall ist die ebene Welle $\varphi(x) = e^{i k_\mu x_\mu}$ eine Lösung der Feldgleichung (2), wenn

$$\zeta_0(k) = \int \varepsilon_0(x) \, e^{i k_\mu x_\mu} \, dx = 0 \tag{6}$$

ist, wenn also die zum Ausbreitungsvektor k_μ gehörige Fourier-Komponente $\zeta_0(k)$ der „Fernwirkungsfunktion" $\varepsilon_0(x)$ verschwindet. Da $\zeta_0(k)$ wegen der Lorentz-Invarianz nur von dem Betrag $k = \sqrt{-k_\mu^2}$ abhängt, sind die Lösungen durch die Nullstellen $k = \varkappa_\varrho$, der Funktion $\zeta_0(k)$ gegeben. Es ist

[1] Abdruck einer am 25. Juni 1944 bei der Redaktion der Annalen der Physik eingegangenen, aber bisher noch nicht erschienenen Arbeit, mit Genehmigung der Herausgeber.

[2] F. Bopp, Ann. Physik **42**, 575 [1943].

[3] Betr. Literaturvergleich E. C. G. Stueckelberg, Nature [London] **144**, 118 [1939]; Helv. Physs. Acta **14**, 51 [1941]; **17**, 1 [1944]; F. Bopp, Ann. Physik **38**, 345 [1940]; A. Pais, Physica, im Erscheinen.

[4] W. Pauli, Rev. mod. Physics **13**, 203 [1941]; auch betr. weitere Literatur.

[5] W. Heisenberg, Z. Physik, im Erscheinen.

[6] In den folgenden Gleichungen steht x für den Vierervektor $(x_1 \,..\, x_4) = (\mathfrak{r}, i c t)$; aber es ist $dx = d\tau \, dt$. Entsprechend sei später $k = (k_1 \,..\, k_4) = (\mathfrak{k}, i\omega/c)$ und $dk = d\tau_k \, d\omega$ gesetzt.

$$k_\mu^2 = \mathfrak{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\varkappa_\varrho^2\,. \tag{7}$$

Jede Nullstelle entspricht also einer Teilchensorte mit bestimmter Masse.

Die äußere Gestalt des Variationsprinzipes in Gl. (1) legt den Gedanken nahe, dieses als ein im R_8 geltendes Prinzip aufzufassen. Allerdings hängen dann die zu variierenden Funktionen von den 8 Koordinaten x und x' ab. Es ist also

$$\varphi = \varphi(x, x')\,, \quad \varphi' = \varphi(x', x)\,, \tag{8}$$

wenn wir mit einem Strich am Funktionszeichen die Vertauschung der Koordinaten x und x' bezeichnen. Das Variationsprinzip im R_8 ist darum mit dem in Gl. (1) nur identisch, wenn wir die Variation durch die Nebenbedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{9}$$

beschränken. Diese können wir nach der Lagrangeschen Parametermethode berücksichtigen. Seien Λ_α die Parameterfunktionen, so lautet die verallgemeinerte Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varphi\,\varepsilon_0\,\varphi' + \frac{1}{2}\left(\Lambda_\alpha \frac{\partial \varphi'}{\partial x_\alpha} + \Lambda'_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x'_\alpha}\right). \tag{10}$$

Die Feldgleichungen folgen jetzt bei freier Variation der von x und x' abhängigen Funktionen φ und Λ_α. Außer den Nebenbedingungen (4) erhält man die Gleichung

$$\varepsilon_0\,\varphi' = \frac{\partial \Lambda'_\alpha}{\partial x'_\alpha}\,. \tag{11}$$

Durch Integration über den x'-Raum ergibt sich Gl. (2) zur Bestimmung von φ. Die Parameter Λ_α, die nachher in den Energie-Impuls-Tensor eingehen, folgen aus der Differentialgleichung (11) als eine im Unendlichen verschwindende Lösung.

Nach dieser Umformung hat das Variationsprinzip eine Form, die den üblichen Methoden zugänglich ist. Nur spielen sich alle Gleichungen zunächst im Raum $R_8\,(x, x')$ ab. Insbesondere existiert ein kanonischer Tensor mit 64 Komponenten, die wir folgendermaßen in Gruppen zusammenfassen wollen:

$$\Theta = \begin{Bmatrix} A^0_{\alpha\beta} & B^0_{\alpha\beta'} \\ C^0_{\alpha'\beta} & D^0_{\alpha'\beta'} \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

Darin ist für unser spezielles Beispiel

$$A^0_{\alpha\beta} = -\mathcal{L}\,\delta_{\alpha\beta}\,, \quad B^0_{\alpha\beta'} = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\Lambda'_\beta\,. \tag{13}$$

D^0 und C^0 folgen aus A^0 und B^0 durch Vertauschung von x und x'. An die Stelle der Erhaltungssätze treten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^0_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial B^0_{\alpha\beta}}{\partial x'_\beta} &= -\frac{1}{2}\varphi\varphi'\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_\alpha}\,, \\ \frac{\partial C^0_{\alpha'\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial D^0_{\alpha'\beta'}}{\partial x'_\beta} &= -\frac{1}{2}\varphi\varphi'\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x'_\alpha}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Für den kanonischen Tensor im R_8 gilt kein Erhaltungssatz, weil die Lagrange-Funktion durch ε_0 explizit von den Koordinaten abhängt. Da aber ε_0 translationsinvariant ist, gilt $\dfrac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_{\alpha'}} = -\dfrac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_\alpha}$, und aus den Gl. (14) folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(A^0_{\alpha\beta} + C^0_{\alpha'\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial x'_\beta}\left(B^0_{\alpha\beta'} + D^0_{\alpha'\beta'}\right) = 0\,. \tag{15}$$

Die Integration über x' liefert den Erhaltungssatz im R_4:

$$\frac{\partial \overline{\Theta}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0\,, \quad \overline{\Theta}_{\alpha\beta} = \overline{A}^0_{\alpha\beta} + \overline{C}^0_{\alpha'\beta} \tag{16}$$

(wobei $\overline{A} = \int A\,dx'$ sein soll). Die Integration ergibt $\overline{A}^0_{\alpha\beta} = -\overline{\mathcal{L}}\,\delta_{\alpha\beta} = 0$ und

$$\overline{\Theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_\alpha}\Lambda_\beta\,dx'\,. \tag{17}$$

Als ein einfaches Beispiel zur Erläuterung dieses Ausdrucks betrachten wir die gewöhnliche Wellengleichung $\Box\varphi - \varkappa^2\varphi = 0$, die aus dem Ausdruck $\varepsilon_0 = -\Box\,\delta(x - x') + \varkappa^2\delta(x - x')$ folgt. Wenn φ eine Lösung dieser Wellengleichung ist, so kann man nach Gl. (11) etwa

$$\Lambda_\beta = -\varphi\frac{\partial \delta}{\partial x_\beta} + \delta\frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \tag{18}$$

setzen. Gl. (17) liefert dann

$$\overline{\Theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\varphi\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\,. \tag{19}$$

Dieser Tensor unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Energie-Impuls-Tensor $T_{\alpha\beta}$ durch eine vollständige Divergenz. Es ist

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} - \overline{\Theta}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}\,, \\ f_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta}\delta_{\gamma\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\gamma}\delta_{\beta\alpha}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Der Unterschied entspricht der Erwartung. Tatsächlich ist $\overline{\Theta}$ durch Gl. (11) nur bis auf eine Divergenz bestimmt. Denn mit Λ_α ist auch

$$\Lambda_\alpha + \frac{\partial U_{\alpha\beta}(x, x')}{\partial x_\beta}$$

eine Lösung der Gl. (11), wenn U ein beliebiger schiefsymmetrischer Tensor ist. Die zugehörigen Werte unterscheiden sich um

$$\Delta \overline{\Theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \int \frac{\partial \varphi(x')}{\partial x'_\alpha} U_{\beta\gamma}(x, x')\, d x'. \quad (21)$$

Allerdings überrascht es zunächst, daß auch der Tensor $\Theta_{\alpha\beta}$ in Gl. (11) symmetrisch ist. Die Eindeutigkeit des Energie-Impuls-Tensors folgt offenbar nur dann aus der Symmetrie-Eigenschaft, wenn man gleichzeitig den Grad der vorkommenden Ableitungen begrenzt[7]. Man erkennt leicht aus Gl. (21), daß sich die Unbestimmtheit nicht auf Gesamtenergie und Gesamtimpuls erstreckt, weil U_{44} verschwindet und U_{k4} nur an den räumlichen Grenzen vorkommt.

Für beliebige Λ_α wird der Tensor in Gl. (17) nicht symmetrisch sein. Doch gibt es einen einfachen Ansatz, der die für die Formulierung des Drehimpulssatzes wünschenswerte Symmetrie mit sich bringt. Wir setzen

$$\Lambda_\alpha = \frac{\partial \psi(x, x')}{\partial x'_\alpha} \quad (22)$$

wobei ψ nach Gl. (10) eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha \partial x'_\alpha} = \varepsilon_0 (x' - x)\, \varphi(x) \quad (23)$$

sein muß. Mit diesem Ausdruck für Λ_α lautet der Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \int \psi(x, x') \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\, d x'. \quad (24)$$

Wir wollen diese Gleichung noch für die Fourier-Komponenten der einzelnen Größen anschreiben, um die Verbindung zu einem von Heisenberg benutzten Ausdruck herzustellen. Es sei

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{16\pi^4} \int \zeta_0(k)\, e^{-i k_\mu x_\mu} d k, \\ \varphi &= \frac{1}{16\pi^4} \int \Phi(k)\, e^{-i k_\mu x_\mu} d k, \\ T_{\alpha\beta} &= \frac{1}{16\pi^4} \int \vartheta_{\alpha\beta}(k)\, e^{-i k_\mu x_\mu} d k, \\ \psi &= \left(\frac{1}{16\pi^4}\right)^2 \int \Psi(k, k')\, e^{-i(k_\mu x_\mu + k'_\mu x'_\mu)} d k\, d k'. \end{aligned} \quad (25)$$

[7] R. Iskraut, Z. Physik **119**, 659 [1942].

Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (23) und (24) ergibt

$$- k_\alpha k'_\alpha \Psi(k, k') = \zeta_0(k')\, \Phi(k + k') \quad (26)$$

und, wenn wir die letzte Gleichung benutzen,

$$\vartheta_{\alpha\beta}(k) = -\frac{1}{32\pi^4} \int \frac{k'_\alpha k'_\beta}{k_\gamma k'_\gamma} \zeta_0(k')\, \Phi(k - k')\, \Phi(k')\, d k', \quad (27)$$

in Übereinstimmung mit Heisenberg[5]. Verwenden wir diese Gleichung zur Bestimmung des Energie-Impuls-Tensors für den Fall $\square \varphi - \varkappa^2 \varphi = 0$, so ist

$$\Phi(k) = 8\pi^4 \sum_{\mu, \nu} \delta(k - \varepsilon_\mu k^0),$$

$$\zeta_0(k) = k_\varrho^2 + \varkappa^2, \quad (\varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = +1),$$

also nach Gl. (27)

$$\vartheta_{\alpha\beta} = 2\pi^4 k_\alpha^0 k_\beta^0 \sum \frac{\varepsilon_\mu^3}{\varepsilon_\mu + \varepsilon_\nu}\, \delta[k - (\varepsilon_\mu + \varepsilon_\nu) k^0].$$

Die beiden Summanden $(\varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu) = (-1, -1)$ und $(+1, +1)$ liefern periodische Anteile des Energie-Impuls-Tensors, die im Mittel verschwinden. Zur Berechnung der beiden anderen Glieder $(\varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu) = (-1, +1)$ und $(+1, -1)$ muß man wegen des verschwindenden Nenners $\varepsilon_\mu + \varepsilon_\nu$, dem eine entsprechende Nullstelle des Zählers gegenübersteht, einen Grenzübergang einschieben. Auf diese Schwierigkeit hat Heisenberg bereits hingewiesen. Das Ergebnis hängt dabei noch von der Art des Grenzübergangs ab. Wir müssen speziell

$$\vartheta_{\alpha\beta}(k) = 2\pi^4 k_\alpha^0 k_\beta^0\, \delta(k) \frac{\varepsilon_2^4 - \varepsilon_1^4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = 8\pi^4 k_\alpha^0 k_\beta^0\, \delta(k) \quad (28)$$

setzen, um das zu erwartende Ergebnis zu erhalten.

Es ist nicht ohne weiteres zu sehen, warum man den Grenzübergang gerade in der eben geschilderten Weise durchführen muß. Darum ist es nützlich, für $\vartheta_{\alpha\beta}$ einen sicher konvergenten Ausdruck anzugeben. Unser spezielles Beispiel führt mit dem Ansatz in Gl. (18) für Λ_α zu dem Ausdruck

$$\vartheta_{\alpha\beta}(k) = -\frac{1}{32\pi^4} \int k'_\alpha (k_\beta - 2 k'_\beta)\, \Phi(k')\, \Phi(k - k')\, d k',$$

der ohne Schwierigkeit das in Gl. (28) angegebene Ergebnis liefert. Die Übertragung auf beliebige Funktionen ε_0 bzw. ζ_0 findet man leicht, wenn man von dem Energiesatz ausgeht. Aus der letzten Gleichung folgt nämlich

$\vartheta_{\alpha\beta}(k)\,k_\beta$

$$= -\frac{1}{32\pi^4}\int k'_\alpha\,(k_\beta{}^2 - 2\,k_\beta\,k'_\beta)\,\Phi(k')\,\Phi(k-k')\,dk'$$

$$= -\frac{1}{32\pi^4}\int k'_\alpha\,[\zeta_0(k-k') - \zeta_0(k')]\,\Phi(k')\,\Phi(k-k')\,dk'$$

und damit $\vartheta_{\alpha\beta}(k)\,k_\beta = 0$ wegen $\zeta_0\,(k)\,\Phi(k) = 0$. Da die letzte Gleichung für beliebige ζ_0 gilt, kann man daraus $\vartheta_{\alpha\beta}$ für beliebige ζ_0 ableiten. Entwickeln wir die Funktion $\zeta_0\,(k'-k) = f\,(k'^2 - 2\,k'\,k + k^2)$ nach Potenzen von k gemäß

$$f\,(k'^2 - 2\,k\,k' + k^2)$$
$$= f\,(k'^2) - k_\alpha\,[(2\,k'_\alpha - k_\alpha)\,f'\,(k'^2) + \ldots]\,,$$

so gilt allgemein

$$-\,32\,\pi^4\,\vartheta_{\alpha\beta} =$$
$$\int k'_\alpha\,[(2\,k'_\beta - k_\beta)\,f'\,(k'^2) + \ldots]\,\Phi(k')\,\Phi(k-k')\,dk'\,.$$

Von den Gliedern in der eckigen Klammer liefert nur das erste, das keinen Faktor k enthält, einen nicht verschwindenden Beitrag. Es ist also speziell für die ebene Welle

$$\vartheta_{\alpha\beta} = 8\,\pi^4\,f'\,(\overset{0}{k}{}_2)\,\overset{0}{k}_\alpha\,\overset{0}{k}_\beta\,\delta\,(k)\,. \tag{29}$$

In unserem Beispiel ist $f'\,(k_0{}^2) = 1$. Der Ansatz $\zeta_0 = k^2\left(1 + \frac{k^2}{\varkappa^2}\right)$ liefert $f'\,(k_0{}^2) = +1$ oder -1, je nachdem wir $k_0{}^2 = 0$ oder $k_0{}^2 = -\varkappa^2$ setzen, je nachdem sich also das Teilchen photonen- oder mesonenartig verhält.

Wir haben bereits aus dem Beispiel in Gl. (18) gesehen, daß der Energie-Impuls-Tensor durch die Symmetrieforderung allein noch nicht eindeutig bestimmt ist. Weder der Ausdruck in Gl. (18) noch der in Gl. (22) führt in dem Sonderfall $\Box\,\varphi = 0$ zu dem üblichen Ausdruck für den Energie-Tensor. Nunmehr wollen wir den Übergang vom kanonischen Tensor zum symmetrischen Energie-Impuls-Tensor noch auf eine andere Weise durchführen, die enger mit der bisherigen Ableitung verwandt ist und die sich in üblicher Weise auf die Lorentz-Invarianz der Lagrange-Funktion stützt. Dazu müssen wir jedoch das in Gl. (1) gegebene Problem etwas anders formulieren.

Statt $\varepsilon_0 = \varepsilon_0\,(x - x')$ benutzen wir im folgenden lieber eine andere Funktion $\varepsilon = \varepsilon\,(x - x')$, die durch die Gleichung

$$\Box\,\varepsilon\,(x) = -\,\varepsilon_0\,(x) \tag{30}$$

definiert sei. Die Lösung ist eindeutig bestimmt, wenn ε genau so wie ε_0 eine (auch gegen Zeitumkehr) Lorentz-invariante Funktion sein soll, so daß unser Problem durch die Transformation inhaltlich nicht abgeändert wird[8]. Für die Lagrange-Dichte kann man nach der Transformation

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\varphi\,(x)}{\partial\,x_\alpha}\,\varepsilon\,(x - x')\,\frac{\partial\,\varphi\,(x')}{\partial\,x'_\alpha} \tag{31}$$

schreiben. Der Übergang zum Variationsproblem im R_8 vollzieht sich genau so wie oben. Die erweiterte Lagrange-Dichte hat die Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_\alpha}\,\varepsilon\,\frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,x'_\alpha} + \frac{1}{2}\left(\Lambda_\alpha\,\frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,x_\alpha} + \Lambda'_\alpha\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x'_\alpha}\right). \tag{32}$$

Die Feldgleichungen im R_8 lauten analog zu Gl. (11)

$$\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,x_\alpha}\,\frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,x'_\alpha} + \frac{\partial\,\Lambda'_\alpha}{\partial\,x'_\alpha} = 0\,. \tag{33}$$

Für die integrierten Feldgleichungen erhält man $\Box\,(\varepsilon, \varphi) = 0$. Die Komponenten des kanonischen Tensors ergeben sich in üblicher Weise:

$$\overset{0}{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_\alpha}\,\varepsilon\,\frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,x'_\beta} - \mathcal{L}\,\delta_{\alpha\beta}\,,\quad \overset{0}{B}_{\alpha\beta'} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_\alpha}\,\Lambda'_\beta\,, \ldots \text{ usw.}$$

Daraus folgt als Energie-Impuls-Satz im R_8

$$\frac{\partial\,\overset{0}{A}_{\alpha\beta}}{\partial\,x_\beta} + \frac{\partial\,\overset{0}{B}_{\alpha\beta}}{\partial\,x'_\beta} = -\,\frac{\partial\,\overset{0}{C}_{\alpha'\beta}}{\partial\,x_\beta} - \frac{\partial\,\overset{0}{D}_{\alpha'\beta'}}{\partial\,x'_\beta} = -\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_\gamma}\,\frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,x'_\gamma}\,\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,x_\alpha}$$

und als kanonischer Tensor

$$\overline{\Theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_\alpha}\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_\beta} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_\gamma}\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_\gamma}\,\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,x'_\alpha}\,\Lambda_\beta\,d\,x'_\beta \text{ mit } \Phi = (\varepsilon, \varphi)\,. \tag{34}$$

[8] Wir sind uns der mit dem Begriff der δ-Funktion zusammenhängenden mathematischen Schwierigkeiten gerade an dieser Stelle wohl bewußt. Es scheint uns aber nicht, daß sie für den physikalischen Inhalt wesentlich sind.

Aus der Lorentz-Invarianz der Lagrange-Funktion folgt nach der infinitesimalen Transformation $\delta x_\alpha = \omega_{\alpha\beta} x_\beta$, $(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0)$,

$$\delta \mathcal{L} = \omega_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \varphi_\alpha} \varphi_\beta + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \varphi_\beta} \varphi\, \alpha \right\}, \quad \left(\varphi\, \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right),$$

oder nach einigen Umformungen

$$= \omega_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\beta} (x_\alpha A^0_{\beta\gamma} + x'_\alpha C^0_{\beta'\gamma}) + \frac{\partial}{\partial x'_\gamma} (x_\alpha B^0_{\beta\gamma'} + x'_\alpha D^0_{\beta'\gamma'}) \right\} = 0. \tag{35}$$

Die Integration über x' führt bei Benutzung der aus dem Lorentz-invarianten Charakter von ε folgenden Beziehung

$$x_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\beta} + x'_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial x'_\beta} \doteq x_\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha} + x'_\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial x'_\alpha}$$

zu der Gleichung

$$\frac{\partial m_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} = 0; \quad \begin{cases} m_{\alpha\beta\gamma} = x_\alpha \overline{\Theta}_{\beta\gamma} - x_\beta \overline{\Theta}_{\alpha\gamma} + \sigma_{\alpha\beta\gamma}, \\ \sigma_{\alpha\beta\gamma} = \overline{(x'_\alpha - x_\alpha, C^0_{\beta'\gamma})} - \overline{(x'_\beta - x_\beta, C^0_{\alpha'\gamma})} \end{cases}. \tag{36}$$

Der Tensor σ läßt sich durch eine Transformation beseitigen, die die Gleichungen (33) und (35) nicht ändert. Eine solche Transformation ist offenbar

$$A_{\alpha\beta} = A^0_{\alpha\beta}, \quad C_{\alpha'\beta} = C^0_{\alpha'\beta} + \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} \text{ usw.} \tag{37}$$

mit $f_{\alpha\beta\gamma} + f_{\alpha\gamma\beta} = 0$. Durch diese Transformation geht σ in

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\beta\gamma} + \overline{\left(x'_\alpha - x_\alpha, \frac{\partial f_{\beta\gamma\varrho}}{\partial x_\varrho}\right)} - \overline{\left(x'_\beta - x_\beta, \frac{\partial f_{\alpha\beta\varrho}}{\partial x_\varrho}\right)}$$

über. Setzen wir

$$f_{\beta\gamma\varrho} = g_{\beta\gamma\varrho}(x)\, \delta(x - x'),$$

so folgt

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\beta\gamma} + g_{\beta\gamma\alpha} - g_{\alpha\gamma\beta}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn wir

$$g_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta\gamma} - \sigma_{\alpha\gamma\beta} - \sigma_{\beta\gamma\alpha})$$

setzen. Der Energie-Impuls-Tensor lautet also

$$T_{\alpha\beta} = \overline{\Theta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (\sigma_{\alpha\beta\gamma} - \sigma_{\alpha\gamma\beta} - \sigma_{\beta\gamma\alpha}). \tag{38}$$

Darin ist

$$\overline{\Theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_\alpha} \Lambda_\beta \, d x' \tag{39}$$

und

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \int (x'_\alpha - x_\alpha) \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_\beta} \Lambda_\gamma \, d x' - \frac{1}{2} \int (x'_\beta - x_\beta) \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_\alpha} \Lambda_\gamma \, d x'. \tag{40}$$

Die Wellengleichung $\Box \varphi = 0$ liefert z. B. $\varepsilon = \delta$, $\Lambda_\alpha = \varphi_\alpha \delta$ und nach den beiden letzten Gleichungen $\sigma_{\alpha\beta\gamma} = 0$ und

$$\Theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta - \frac{1}{2} \varphi^2_\gamma \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta, \tag{41}$$

d. i. der Energie-Impuls-Tensor in der gewöhnlichen Form.

Das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung, die rein mathematisch-methodisch ist, erzwingt noch eine physikalische Diskussion. Vergleichen wir

$$\zeta_0 = k^{02}_\alpha, \quad \zeta_0 = \frac{k^{02}_\alpha}{1 - k^{02}_\alpha / \varkappa^2}, \tag{42}$$

so stimmen die Lösungen der zugeordneten Wellengleichungen $(\varepsilon_0, \varphi) = 0$ überein und führen nach Gl. (29) auch zur selben Energie. Es fragt sich, wie sich der Unterschied der beiden Ansätze physikalisch äußert. Offenbar geben sie nur für solche Wellen etwas Verschiedenes, für die $k^{02}_\alpha \neq 0$ ist, die also keine Lösung der Wellengleichung darstellen. Diese Wellen spielen eine Rolle, wenn wir die Felder von Punktquellen betrachten. Bekanntlich befriedigt das Coulomb-Potential $\varphi = \frac{1}{r}$ die Wellengleichung $\Box \varphi = 0$ nur außerhalb der Singularität $r = 0$. Die Entwicklung von φ nach ebenen Wellen enthält darum hauptsächlich Glieder, für die $k_\alpha^2 \neq 0$ ist. Die aus zahlreichen Untersuchungen bekannten Fourier-Komponenten lauten [mit Faktoren gemäß Gl. (25)]

$$\Phi(\mathfrak{k}, \omega) = \frac{2\pi\,\delta(\omega)}{\mathfrak{k}^2}. \tag{43}$$

Sämtliche „Wellen" gehören in diesem Fall zu $\omega = 0$. Von diesen erfüllt nur $\mathfrak{k} = 0$ die Wellengleichung $k_\alpha^{0\,2} = 0$. Für beliebige ζ_0 erhält man statt dessen aus der Gleichung $(\varepsilon_0, \varphi) = \delta(\mathfrak{r})$:

$$\Phi(\mathfrak{k}, \omega) = \frac{2\pi\,\delta(\omega)}{\zeta_0(\mathfrak{k}, o)}, \tag{44}$$

ein Ergebnis, das in der Tat mit ζ_0 variiert. Daraus folgt als statisches Potential

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int \frac{\sin kr\, k dk}{\zeta_0(\mathfrak{k}, o)}. \tag{45}$$

Bei der Berechnung der Energie muß man beachten, daß sich der Energie-Impuls-Tensor infolge der Inhomogenität ändert. Für den bisherigen Tensor $\overline{\Theta}_{\alpha\beta}^{\text{hom}}$ erhält man aus

$$(\varepsilon_0, \varphi) = \varrho : \quad \frac{\partial \Lambda'_\alpha}{\partial x'_\alpha} = \varepsilon_0\,\varphi' - \varrho'\,\delta$$

und nach Gl. (17)

$$\frac{\partial \overline{\Theta}_{\alpha\beta}^{\text{hom}}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2}\,\varphi\,\frac{\partial \varrho}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \overline{\Theta}_{\alpha\beta}^{\text{inh}}}{\partial x_\beta} = -\varrho\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}; \quad \overline{\Theta}_{\alpha\beta}^{\text{inh}} = \Theta_{\alpha\beta}^{\text{hom}} - \frac{1}{2}\,\varrho\,\varphi\,\delta_{\alpha\beta}, \tag{46}$$

und die Fourier-Zerlegung ergibt

$$\vartheta_{\alpha\beta}^{\text{inh}} = \vartheta_{\alpha\beta}^{\text{hom}} - \frac{1}{32\pi^4}\int \varrho(k')\,\Phi(k-k')\,dk'. \tag{47}$$

Der Ansatz in Gl. (27) für $\vartheta_{\alpha\beta}^{\text{hom}}$ erweist sich wieder als unbestimmt. Setzen wir dagegen ähnlich wie vor Gl. (29)

$$\vartheta_{\alpha\beta}^{\text{hom}} = -\frac{1}{32\pi^4}\int k'_\alpha(k_\beta - 2k'_\beta)\frac{\zeta_0(k-k') - \zeta_0(k')}{(k-k')^2 - k'^2}\,\Phi(k')\,\Phi(k-k')\,dk', \tag{48}$$

so zeigt sich, daß $\vartheta_{\alpha\beta}^{\text{hom}}$ keinen Beitrag zur Gesamtenergie liefert. Es ist also

$$E = -\int \Theta_{44}^{\text{inh}}\,d\tau = -\frac{1}{2\pi}\int \vartheta_{44}^{\text{inh}}(0,\omega)\,e^{-i\omega t}\,dr = \frac{1}{2}\int \varrho\,\varphi\,d\tau \tag{49}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (45)

$$E = \frac{1}{4\pi^2}\int \frac{k^2\,dk}{\zeta_0(\mathfrak{k}, o)} = \frac{1}{4\pi^2}\int \frac{dk}{\zeta(\mathfrak{k}, o)}. \tag{50}$$

Für $\zeta = 1 + \frac{k_\alpha^{0\,2}}{\varkappa^2}$ erhält man danach $E = \frac{\varkappa}{8\pi}$, wie man bei den hier benutzten Einheiten $e = 1/\sqrt{4\pi}$) erwarten muß. Mit Rücksicht auf die Kritik des letzten Beispiels hinsichtlich der negativen Quanten[3] sei bemerkt[9], daß es auch Ansätze gibt, die zu einer endlichen Energie der Punktladung führen bei stets positiver Quantenenergie.

Hrn. Prof. Heisenberg möchte ich für fördernde Diskussionen herzlich danken.

[9] Neuerdings wurde dieser Punkt ausführlich behandelt: F. Bopp, Z. Naturforschg. **1**, 57 [1946].